

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

- C1** а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3} \cos x = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3} \cos x = 0;$$

$$\sin x(\cos x - 2) - \sqrt{3} \cos x(\cos x - 2) = 0;$$

$$(\cos x - 2)(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0.$$

Уравнение $\cos x - 2 = 0$ не имеет корней. Следовательно,

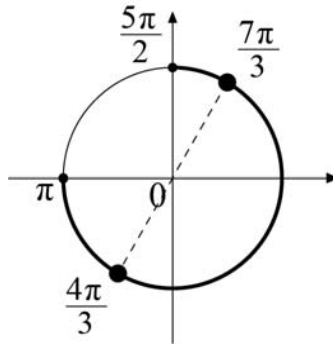
$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, это невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем:

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

- б) Отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	2

- C2** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC , точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC = 6$, $AB = 4$.

Решение.

Проведем перпендикуляр CQ к MK , Q – середина MK . Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC . MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC , $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ – линейный угол искомого угла. Найдем QP .

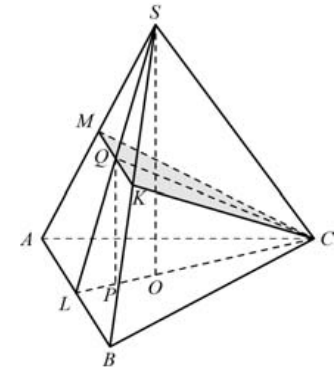
$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{6^2 - \frac{16}{3}} = 2\sqrt{\frac{23}{3}};$$

$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{\frac{23}{3}};$$

$$CP = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \angle QCP = \frac{\sqrt{23} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{\sqrt{23}}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}.$$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено или при правильном ответе решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

С3 Решите систему

$$\begin{cases} \log_{2x+1}(4x-5) + \log_{4x-5}(2x+1) \leq 2, \\ 9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{2x+1}(4x-5) + \frac{1}{\log_{2x+1}(4x-5)} \leq 2.$$

Сделаем замену $y = \log_{2x+1}(4x-5)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2; \quad \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0,$$

откуда $y = 1$ или $y < 0$.

Если $\log_{2x+1}(4x-5) = 1$, то

$$\begin{cases} 2x+1 = 4x-5, \\ 2x+1 > 0, \\ 2x+1 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x = 3$.

Если $\log_{2x+1}(4x-5) < 0$, то

$$\begin{cases} \frac{4x-5-1}{2x+1-1} < 0, \\ 2x+1 > 0, \\ 4x-5 > 0, \\ 2x+1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \frac{4x-6}{x} < 0, \\ x > \frac{5}{4}; \end{cases}$$

$$\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}.$$

Решение неравенства: $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$ или $x = 3$.

Решим второе неравенство. Разделим обе части на 4^x :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 \leq 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Получаем:

$$z^2 - 2z - 3 \leq 0; \quad -1 \leq z \leq 3.$$

Обратная замена дает: $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 3; \quad x \leq \log_{1,5} 3$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Учитывая, что $2 < \log_{1,5} 3 < 3$, находим решение системы: $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

С4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP , значит, CM и BN – медианы треугольника BPC . Пусть h – высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда

$$\frac{a + 2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 135, \quad ah = 90,$$

а $OC = 2x$, т.к. O – точка пересечения медиан треугольника BPC , поэтому

$$AM = MC = 3x, \quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x, \quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$S_{\Delta MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\Delta AOD} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24} \cdot 90 = \frac{15}{4}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h – высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 90$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4}, \quad \frac{PM}{PB} = \frac{1}{5}, \quad MC = 12t, \quad AC = AM + MC = 15t, \quad AO = 5t, \quad MO = 2t,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$. Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}$.

Следовательно,

$$S_{\Delta MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\Delta AOD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75} \cdot 90 = \frac{12}{5}.$$

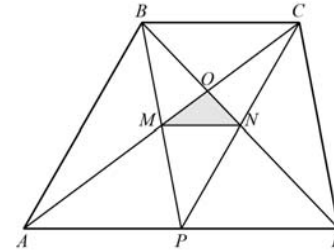


Рис. 1

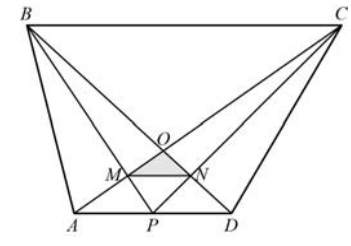


Рис. 2

Ответ: $\frac{15}{4}$ или $\frac{12}{5}$.

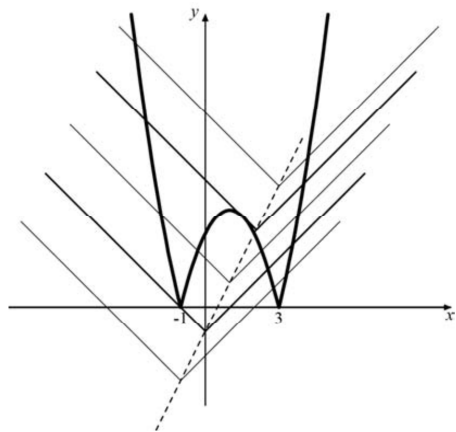
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С5 При каких a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $|x^2 - 2x - 3| = |x - a| + 2a - 1$. Построим график функции $y = |x^2 - 2x - 3|$ и график функции $y = |x - a| + 2a - 1$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два — при одном из них график правой части проходит через точку $(-1; 0)$ при другом — касается отраженного

участка параболы. Первое, очевидно, происходит при $a = 0$, а второе — когда уравнение $3 + 2x - x^2 = 3a - 1 - x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим $a = \frac{25}{12}$.



Ответ: $0; \frac{25}{12}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4.
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности, например отсутствуют рисунки для различных значений параметра	3.
Ход решения в целом верен, но ответ содержит посторонние числа, или найдено только одно из верных значений	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0.
<i>Максимальный балл</i>	4

С6 В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) может ли в последовательности быть три члена?
 б) может ли в последовательности быть четыре члена?
 в) может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Решение.

а) Нет, поскольку $1 + 2046$ нечетно, а 2046 не является квадратом натурального числа.
 б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2046 - 1$ не делится на 3.
 Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку число 2046 не является кубом натурального числа.
 Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, то эти числа: $1, q, q^2, 2q^2 - q$ но уравнение $2q^2 - q - 2046 = 0$ не имеет целых корней.
 Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую, то первые три числа: $1, a + 1, 2a + 1$, где a — натуральное число.
 Тогда последнее число должно равняться $\frac{(2a+1)^2}{a+1} = 4a + 4 + \frac{1}{a+2}$, а это не целое число.
 в) может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?
 Да, например 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2046

Содержание критерия.	Баллы.
Верно решены все три пункта.	4
Верно решены два пункта: a и b или b и v .	3.
Верно решены два пункта: a и v или один пункт b .	2.
Верно решен только один из пунктов: a или v .	1.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0.
<i>Максимальный балл</i>	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

- C1** а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.
 а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$\begin{aligned} 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3} \sin x &= 0; \\ \cos x(\sin x + 2) - \sqrt{3} \sin x(\sin x + 2) &= 0; \\ (\sin x + 2)(\cos x - \sqrt{3} \sin x) &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение $\sin x + 2 = 0$ не имеет корней. Следовательно,

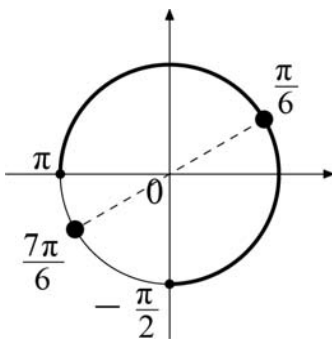
$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, это невозможно. Значит, $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3} \cos x$. Получаем:

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Тогда $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

- б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ принадлежит только корень $\frac{\pi}{6}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	2

- C2** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC , точка M – середина ребра SA , точка K – середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC=8, AB=6$.

Решение.

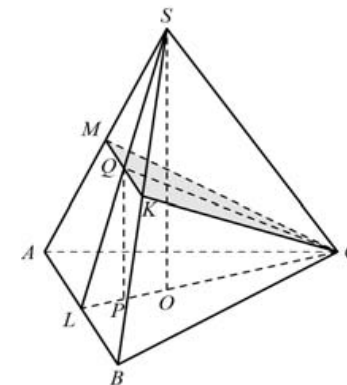
Проведем перпендикуляр CQ к MK , Q – середина MK . Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC . MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ – линейный угол искомого угла. Найдем QP .

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 - 12} = 2\sqrt{13};$$

$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{13};$$

$$CP = \frac{1}{2}OL = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \angle QCP = \frac{\sqrt{13} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{2\sqrt{39}}{15}.$$



Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{39}}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено или при правильном ответе решение недостаточно обоснованно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

С3 Решите систему

$$\begin{cases} \log_{3x+1}(4x-6) + \log_{4x-6}(3x+1) \leq 2, \\ 16^x - 12^x - 2 \cdot 9^x \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{3x+1}(4x-6) + \frac{1}{\log_{3x+1}(4x-6)} \leq 2.$$

Сделаем замену $y = \log_{3x+1}(4x-6)$:

$$y + \frac{1}{y} \leq 2; \quad \frac{(y-1)^2}{y} \leq 0,$$

откуда $y = 1$ или $y < 0$.

Если $\log_{3x+1}(4x-6) = 1$, то

$$\begin{cases} 3x+1 = 4x-6, \\ 3x+1 > 0, \\ 3x+1 \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x = 7$.

Если $\log_{3x+1}(4x-6) < 0$, то

$$\begin{cases} \frac{4x-6-1}{3x+1-1} < 0, \\ 3x+1 > 0, \\ 4x-6 > 0, \\ 3x+1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \frac{4x-7}{x} < 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}.$$

Решение неравенства: $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}$ или $x = 7$.

Решим второе неравенство. Разделим обе части на 9^x :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 2 \leq 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. Получаем: $z^2 - z - 2 \leq 0$; $-1 \leq z \leq 2$.

Обратная замена дает: $\left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 2$; $x \leq \log_{\frac{4}{3}} 2$.

Решением системы является общая часть решений двух неравенств. Учитывая, что $2 < \log_{4/3} 2 < 7$, находим решение системы: $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке O . Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь треугольника MON , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP , значит, CM и BN – медианы треугольника BPC . Пусть h – высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$, $OM = x$. Тогда

$$\frac{a + 2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 810, \quad ah = 540,$$

а $OC = 2x$, т.к. O – точка пересечения медиан треугольника BPC , поэтому

$$AM = MC = 3x, \quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x, \quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно,

$$S_{\Delta MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\Delta AOD} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24} \cdot 540 = \frac{45}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h – высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 540$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а

треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4}, \quad \frac{PM}{PB} = \frac{1}{5}, \quad MC = 12t, \quad AC = AM + MC = 15t, \quad AO = 5t, \quad MO = 2t,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$. Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}$. Следовательно,

$$S_{\Delta MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\Delta AOD} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75} \cdot 540 = \frac{72}{5}.$$

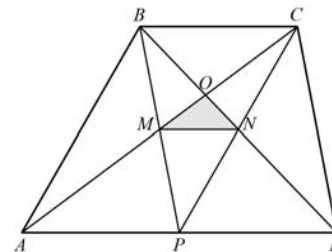


Рис. 1

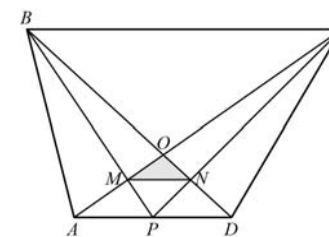


Рис. 2

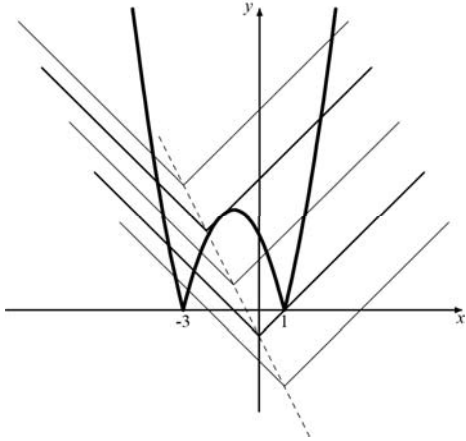
Ответ: $\frac{45}{2}$ или $\frac{72}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3

С5 При каких a уравнение $|x^2 + 2x - 3| - 2a = |x + a| - 1$ имеет ровно три корня?

Решение.

Запишем уравнение в виде $|x^2 + 2x - 3| = |x + a| + 2a - 1$. Построим графики функций $y = |x^2 + 2x - 3|$ и $y = |x + a| + 2a - 1$. Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два – при одном из них график правой части проходит через точку $(1; 0)$, при другом – касается отраженного участка параболы. Первое, очевидно, происходит при $a = 0$, а второе – когда уравнение $3 - 2x - x^2 = 3a - 1 + x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим $a = \frac{25}{12}$.



Ответ: 0; $\frac{25}{12}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован, или в обосновании содержатся мелкие неточности, например отсутствуют рисунки для различных значений параметра	3
Ход решения в целом верен, но ответ содержит посторонние числа, или найдено только одно из верных значений	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

С6 В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.

- а) может ли в последовательности быть три члена?
- б) может ли в последовательности быть четыре члена?
- в) может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

а) Нет, поскольку $1 + 2076$ не делится на 2, а 2076 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2076 - 1$ не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку 2076 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, то эти числа: $1, q, q^2, 2q^2 - q$, но уравнение $2q^2 - q - 2076 = 0$ не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, то эти числа: $1, a + 1$ и $2a + 1$ где a – натуральное число.

Тогда последнее число должно равняться $\frac{(2a+1)^2}{a+1} = 4a + 4 + \frac{1}{a+1}$, а это

не натуральное число.

в) Да, например 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2076.

Содержание критерия	Баллы
Верно решены все три пункта	4
Верно решены два пункта: a и b или b и v	3
Верно решены два пункта: a и v или один пункт b	2
Верно решен только один из пунктов: a или v	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4